

## การทดลอง ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย

### วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (simple harmonic motion, SHM) ของลูกตุ้มนาฬิกาชนิดธรรมดา (simple pendulum)
2. เพื่อหาความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ณ ตำแหน่งที่ทำการทดลอง

### อุปกรณ์

1. ชุดขาตั้งของลูกตุ้มนาฬิกาชนิดธรรมดา
2. ลูกตุ้มโลหะ
3. ลูกตุ้มไม้
4. เชือกเบาที่ไม่ยืดหยุ่น 2 เส้น
5. นาฬิกาจับเวลา
6. ไม้เมตร 2 อัน
7. เวอร์เนียคาลิปเปอร์
8. สลิตหรือแผ่นโลหะที่มีช่องเปิดเป็นทางยาวเล็ก ๆ

### ทฤษฎี

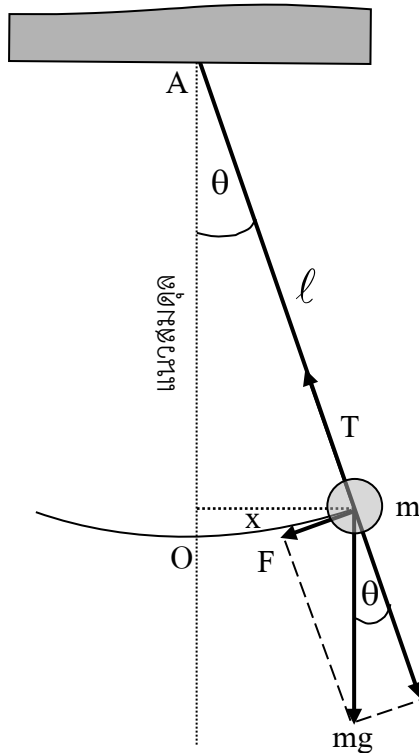
ลูกตุ้มนาฬิกาชนิดธรรมดาประกอบด้วยวัตถุทรงกลมเล็ก ๆ แขนงด้วยเชือกเบามาก เมื่อเทียบกับมวลของวัตถุทรงกลมที่แขวนนั้น ซึ่งไม่ยืดหรือไม่หด เชือกที่ใช้แขวนต้องยาวเมื่อเทียบกับรัศมีของวัตถุทรงกลม เมื่อตั้งให้ลูกตุ้มออกไปจากตำแหน่งสมดุลเดิมในแนวตั้ง แล้วปล่อย ลูกตุ้มจะแกว่งไปมาในแนวตั้งภายใต้อิทธิพลสนามแรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งเป็นผลจากน้ำหนักของลูกตุ้มและแรงดึงเส้นเชือกทำให้เกิดแรงที่พยายามดึงลูกตุ้มกลับสู่ตำแหน่งสมดุล

สมมติตั้งให้ลูกตุ้มซึ่งมีมวล  $m$  ออกไปทำมุม  $\theta$  กับแนวตั้ง อาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อ 2 ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ) จะได้ว่าแรงที่พยายามดึงลูกตุ้มให้กลับสู่ตำแหน่งสมดุล (จุด  $o$  ในรูปที่ 1) เรียกว่า **แรงดึงกลับ** คือ

$$F = -mg \sin \theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

ถ้ามุม  $\theta$  มีขนาดเล็ก แล้ว  $\sin \theta \approx \theta$  เมื่อมุม  $\theta$  มีหน่วยเป็นเรเดียน ซึ่งมีผลทำให้ระยะตามแนวโค้ง  $x$  มีค่าใกล้เคียงเกือบเท่ากับระยะกระจัด  $l \sin \theta$  ดังนั้นอาจประมาณว่าระยะตามแนวโค้ง  $x$  จากตำแหน่งสมดุลมีค่า

$$x = l\theta \quad \dots\dots\dots(2)$$



รูปที่ 1

เมื่อ  $x$  เป็นระยะอาร์กหรือส่วนโค้งของวงกลม และ  $l$  เป็นความยาวแขนของลูกตุ้ม (ความยาวเชือก + รัศมีของลูกตุ้ม) จากสมการ (1) ถ้ามุม  $\theta$  มีค่าไม่มากนัก จะได้  $F \approx -mg\theta$  แทนค่า  $\theta$  จากสมการ (2)

$$F \approx -\frac{mgx}{l} = -kx \quad \dots\dots\dots(3)$$

โดยที่ ค่าคงที่  $k = \frac{mg}{l}$

ดังนั้น จากสมการ (3) จะได้ว่า เมื่อมุม  $\theta$  ของการแกว่งมีขนาดเล็ก การเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม นาฬิกาชนิดธรรมดา เป็นการเคลื่อนที่แบบ simple harmonic motion (SHM)

จากการเคลื่อนที่แบบ SHM คาบของการแกว่ง (period)  $T$  จะสัมพันธ์กับมวล  $m$  และค่าคงที่  $k$  ดังสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \dots\dots\dots(4)$$

แทนค่า  $k$  ด้วย  $\frac{mg}{l}$  ลงในสมการ (4) จะได้

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \dots\dots\dots(5)$$

จากสมการ (5) จะเห็นว่า การเคลื่อนที่แบบ SHM คาบของการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา T ขึ้นอยู่กับความยาวของแขนลูกตุ้ม  $\ell$  เท่านั้น ซึ่งเป็นจริงเฉพาะในกรณีมุม  $\theta$  มีค่าไม่มากนัก ( $\theta < 10^\circ$ ) แต่ถ้าแอมพลิจูดของการแกว่งมีขนาดกว้างกว่าค่านี้ สมการที่ถูกต้องจะเป็นฟังก์ชันของ  $\sin \theta$  คือ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2^2}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\right) \sin^4 \frac{\theta}{2} + \dots\dots\dots \right] \quad \dots\dots\dots(6)$$

และจากสมการ (5) เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

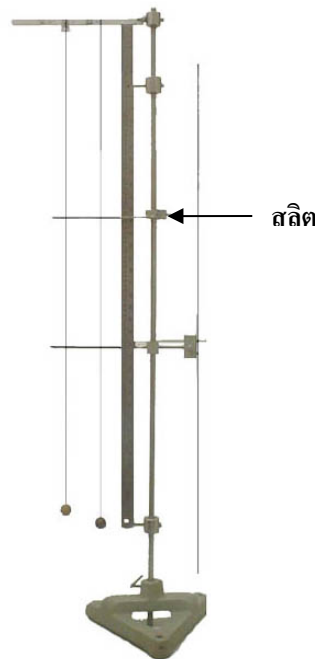
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right) \ell$$

ถ้าเขียนกราฟระหว่าง  $T^2$  และ  $\ell$  ให้อยู่ในแกนตั้งและแกนนอนตามลำดับ จะได้กราฟเส้นตรงโดยมี

$$\text{ความชันของกราฟ} = \frac{\Delta(T^2) \text{ ในหน่วยของ } T^2}{\Delta \ell \text{ ในหน่วยของ } \ell} = \frac{4\pi^2}{g}$$

ดังนั้น จะหาความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก  $g$  ได้จาก

$$g = \frac{4\pi^2}{\text{ความชันของกราฟ}} \quad \dots\dots\dots(7)$$



รูปที่ 2 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

### วิธีการทดลอง

**ตอนที่ 1** ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคาบของการแกว่ง และความยาวของแขนลูกตุ้ม

1. วัดเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกตุ้มโลหะด้วยเวอร์เนียคาลิเปอร์ 3 ครั้ง แต่แต่ละครั้งเอา 2 ทาร เป็นค่ารัศมีของลูกตุ้มโลหะ จากนั้นหาค่าเฉลี่ยโดยนำผลรวมของรัศมีที่ได้จากการวัดทั้งสาม ครั้งหารด้วย 3 แล้วบันทึกค่ารัศมีเฉลี่ยที่ได้
2. จัดความยาวของเชือก (L) ประมาณ 100 เซนติเมตร โดยให้ปลายบนของเชือกยึดกับปุ่มที่อยู่ ใกล้ไม้เมตรที่อยู่แนวตั้งมากที่สุด ใช้ความยาวของเชือกบวกกับรัศมีเฉลี่ยของลูกตุ้มเป็นค่า  $l$  บันทึกค่าในรายงานผลการทดลอง
3. จับลูกตุ้มโลหะให้เบนจากแนวตั้งเป็นมุมเล็ก ๆ ประมาณไม่เกิน  $5^\circ$  แล้วปล่อยให้ลูกตุ้มแกว่ง จับเวลาของการแกว่งครบ 20 รอบ บันทึกเวลาการแกว่งครบ 20 รอบ ทำการทดลองซ้ำอีก 1 ครั้ง แล้วหาค่าเฉลี่ย จากนั้นคำนวณหาคาบของการแกว่ง (T) และค่า  $T^2$  บันทึกผลที่ได้ใน รายงานผลการทดลอง
4. ทำการทดลองเช่นเดียวกับข้อ 3. โดยใช้ความยาวของเชือก 80, 60, 40, 30, 20 และ 10 เซนติเมตร การเปลี่ยนความยาวเชือกอาจกระทำได้โดยการจัดเส้นเชือกให้อยู่ภายในช่องเปิด เป็นทางยาวเล็ก ๆ ของสลิตและปรับตำแหน่งของสลิตให้ได้ความยาวของเชือกที่ต้องการ (ดู รูปที่ 2)
5. เขียนกราฟระหว่าง  $T^2$  และ  $l$  โดยให้  $T^2$  อยู่ในแกนตั้ง และ  $l$  อยู่ในแกนนอน และหาความชันของกราฟ

6. คำนวณหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ( $g$ ) ณ ตำแหน่งที่ทำการทดลอง โดยอาศัยผลจากการทดลองข้อ 5. และสมการ (7) ในทฤษฎี

**ตอนที่ 2** ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคาบของการแกว่งและมวลของลูกตุ้ม

1. นำลูกตุ้มไม้ที่แขวนด้วยเชือกเบาชนิดเดียวกันกับการทดลองตอนที่ 1 มาจัดค่าความยาวเชือกบวกกับคาร์ซีมของลูกตุ้ม (ในที่นี้คือค่า  $l$ ) ให้มีค่าประมาณเท่ากับค่าที่ใช้ในการทดลองตอนที่ 1 ค่าใดค่าหนึ่ง
2. แกว่งโดยไม่ให้สายด้วยแอมพลิจูดของการแกว่งเท่ากันกับการทดลองข้อ 3. ตอนที่ 1
3. จับเวลาของการแกว่งของลูกตุ้มไม้ครบ 20 รอบ 2 ครั้ง แล้วหาค่าเฉลี่ยคำนวณหาค่า  $T$
4. ทำการทดลองเช่นเดียวกันกับในข้อ 1. ถึง 3. อีก 2 ครั้ง โดยเลือกจัดค่า  $l$  ใหม่
5. เปรียบเทียบค่า  $T$  ของลูกตุ้มไม้กับค่า  $T$  ของลูกตุ้มโลหะที่ได้จากการทดลองตอนที่ 1 ที่ความยาว  $l$  เดียวกัน